

Pismeni ispit iz Matematike
3.7.2007.

Grupa 3A72007

1.grupa

1. Za koji se parametar $t \in \mathbb{R}$ jedan od vektora $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ i $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ t \end{bmatrix}$ može prikazati kao linearna kombinacija preostalih?

1.' Ispišite determinantu matrice $A \in M_3$ čiji su elementi $a_{ij} = \min\{i+1, j\}$ i navedite njenu vrijednost bez da je računate. Obrazložite.

2.grupa

2. Dana je funkcija troškova $T(Q) = Q' \sqrt{Q}$ gdje je Q količina proizvodnje. Izračunajte parametar $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$ takav da su troškovi elastični u odnosu na proizvodnju.

2.' Investitor ima na raspolaganju 15000 kn koje ulaže u dva vrijednosna papira. Označimo s x svotu uloženu u prvi, a s y svotu uloženu u drugi vrijednosni papir. Tada je funkcija rizika zadana u obliku $r(x, y) = (x - 8000)^2 + (y - 7500)^2$. Uz uvjet da se uloži cijela raspoloživa svota, izračunajte uz koje se ulaganje ostvaruje minimalni rizik, te koliko on iznosi?

3.grupa

3. Izračunajte parametar $t \in \mathbb{R}$ takav da je $\int_t^0 e^{-x} dx = e^2 - 1$.

3.' Pronađite funkciju ukupnih prihoda $R(Q)$ ako joj je koeficijent elastičnosti u odnosu na proizvodnju $E_{R,Q} = \frac{1}{2}$ i $R(2) = 10$.

4. grupa

4. Koliko moramo danas uložiti u banku da bismo za četiri godine raspolagali s iznosom od 20000 EUR ako je godišnji dekurzivni kamatnjak 1.5? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.

4.' Zajam od 450 000 kn odobren je na godinu dana uz plaćanje jednakih anuiteta krajem mjeseca. Ako je godišnji kamatnjak 6, izračunajte anuitet i ukupne kamate. Obračun kamata je mjesečni, složen i dekurzivan. Izradite otplatnu tablicu za zadnja dva mjeseca. Koristite relativni kamatnjak.

Napomena: za pozitivnu je ocjenu potrebno iz svake grupe zadataka izraditi po jedan točan zadatak.

Rješenje:

1. $t=1$

2' 3.7.2007.
gr. 3A7 2007

UVJET :

$$x+y=15000 \Rightarrow \varphi(x,y) = x+y-15000$$

$$R = r(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$$

tz. FUNKCIJA + λ · UVJET

$$R = (x-8000)^2 + (y-7500)^2 + \lambda \cdot (x+y-15000)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x-8000) + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-7500) + \lambda = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$2(x-8000) + \lambda = 0$$

$$2(-y+7500) - \lambda = 0$$

$$2(x-y-500) = 0$$

$$x-y=500$$

$$x+y=15000 \leftarrow$$

$$2x = 15500$$

$$x = 7750$$

$$y = 15000 - 7750 = 7250$$

$$2(x-8000) + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -2(7750-8000)$$

$$\boxed{\lambda = 500}$$

$$R = (7750-8000)^2 + (7250-7500)^2 + 500(7750+7250-15000)$$

$$R = 62500 + 62500 + 0 = 125000 \quad \checkmark$$

$$m(7750, 7250, 125000)$$

② 3.7.2007.

$$T(Q) = Q^t \sqrt{Q}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

$$T(Q) = Q^t \cdot Q^{1/2}$$

$$T(Q) = Q^{t+1/2}$$

$$E_{Q,T} = \frac{Q}{T} \cdot T'$$

$$= \frac{Q \cdot (t + \frac{1}{2}) \cdot Q^{t-\frac{1}{2}}}{Q^{t+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(t + \frac{1}{2}) \cancel{Q^{t+\frac{1}{2}}}}{\cancel{Q^{t+\frac{1}{2}}}} = t + \frac{1}{2}$$

$$E_{Q,T} > 1 \Rightarrow t + \frac{1}{2} > 1$$

$$t > \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

